

Е. І. Личковський, П. Л. Свердан, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник для студентів вищого фармацевтичного
навчального закладу і фармацевтичних факультетів вищих
медичних навчальних закладів
IV рівня акредитації

Вінниця
Нова Книга
2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
В55

*Затверджено Міністерством охорони здоров'я України
як підручник для студентів вищого фармацевтичного навчального закладу
і фармацевтичних факультетів вищих медичних навчальних закладів
IV рівня акредитації (протокол № 4 від 27.12.2012 р. засідання Комісії
з медицини науково-методичної ради з питань освіти Міністерства освіти
і науки, молоді та спорту України)*

Автори:

Е. І. Личковський, П. Л. Свердан, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий

Рецензенти:

Директор Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету “Львівська політехніка”, завідувач кафедри вищої математики доктор фіз.-мат. наук, професор **П. І. Каленюк**

Завідувач кафедри вищої математики Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фіз.-мат. наук, професор **Б. І. Копитко**

Завідувач кафедри вищої математики Львівської комерційної академії, доктор фіз.-мат. наук, професор **А. І. Пілявський**

*Видання підготовлено відповідно до наказу МОЗ України від 22.06.2010 № 502
як єдиний національний підручник*

Вища математика : підручник / Е. І. Личковський,
В55 П. Л. Свердан, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий ; за ред. Е. І. Личковського,
П. Л. Свердана. – Вінниця : Нова Книга, 2014. – 632 с.
ISBN 978-966-382-538-0

У підручнику викладено теорію границь, диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних, інтегральне числення, моделювання процесів диференціальними рівняннями, теорію ймовірностей, аналіз варіаційних рядів, методологію оцінювання та статистичної перевірки гіпотез, основи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу. Матеріал представлено у світлі його застосування для аналізу фармацевтичної та медико-біологічної інформації. Значна увага приділена практиці розв'язання типових задач, графічного представлення та аналізу результатів. Подано завдання для самоконтролю, вправи для аудиторної та домашньої роботи, а також довідкові матеріали.

Для студентів вищого фармацевтичного закладу та фармацевтичних факультетів вищих медичних навчальних закладів III–IV рівнів акредитації.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-966-382-538-0

© Автори, 2014
© Нова Книга, 2014

ЗМІСТ

Передмова.....	11
Розділ 1. Вступ до аналізу.....	13
1.1. Поняття множини.....	13
1.2. Операції над множинами.....	17
1.3. Функція однієї змінної.....	21
1.4. Загальні відомості про функції.....	23
1.4.1. Парні і непарні функції.....	23
1.4.2. Періодичні функції.....	24
1.4.3. Обмежені функції.....	25
1.4.4. Обернена функція.....	26
1.4.5. Монотонність функції.....	28
1.4.6. Складені функції.....	28
1.4.7. Неявні функції.....	30
Розділ 2. Границя і неперервність функції.....	31
2.1. Границя функції неперервного аргументу.....	31
2.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.....	34
2.3. Властивості границь функцій та правила знаходження границь.....	38
2.4. Неперервність функції.....	45
2.5. Асимптоти функції.....	53
Вправи до розділу 2.....	55
Розділ 3. Похідна функції та її застосування.....	58
3.1. Приріст аргументу та приріст функції.....	58
3.2. Похідна функції.....	61
3.3. Диференціювання функцій.....	64
3.4. Фізичний зміст першої та другої похідної.....	68
3.5. Геометричний зміст похідної.....	70
3.6. Основні теореми диференціального числення.....	73
3.7. Застосування похідної для визначення інтервалів монотонності та екстремумів функції.....	77
3.8. Застосування другої похідної для дослідження опуклості кривої та знаходження точок перегину.....	81
3.9. Повне дослідження функції.....	84
3.10. Розкриття невизначеностей за правилами Лопітала.....	87
3.11. Варіант поточного контролю засвоєння теми.....	89
Вправи до розділу 3.....	92

Розділ 4. Диференціал функції та його застосування	98
4.1. Означення диференціала	98
4.2. Геометричний зміст диференціала	102
4.3. Основні формули і правила диференціювання	103
4.4. Диференціали вищих порядків	105
4.5. Застосування диференціала для лінійної апроксимації функції	107
4.6. Застосування диференціала для оцінки граничної похибки опосередкованих вимірювань	109
4.7. Варіант поточного контролю засвоєння теми	113
Вправи до розділу 4	115
Розділ 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних	118
5.1. Поняття m -вимірного евклідового простору	118
5.2. Функція багатьох змінних	122
5.3. Границя і неперервність функції багатьох змінних	128
5.4. Частинні похідні функцій багатьох змінних	132
5.5. Частинні та повний диференціали функції багатьох змінних	137
5.6. Застосування повного диференціала як лінійної апроксимації функцій	142
5.7. Визначення граничної похибки опосередкованих вимірювань	147
5.8. Застосування повного диференціала для операцій з наближеними числами	149
5.9. Варіант поточного контролю засвоєння теми	150
Вправи до розділу 5	152
Розділ 6. Інтегральне числення. Застосування інтегрального числення	155
6.1. Невизначений інтеграл	155
6.2. Основні властивості невизначеного інтеграла	158
6.3. Таблиця основних інтегралів	159
6.4. Безпосереднє інтегрування	160
6.5. Інтегрування методом заміни змінної	161
6.6. Метод інтегрування частинами	165
6.7. Визначений інтеграл	167
6.8. Властивості визначеного інтеграла	171
6.9. Невласні інтеграли	177

6.9.1. Невласні інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування	177
6.9.2. Невласні інтеграли від необмежених на проміжку інтегрування функцій	180
6.10. Наближені методи обчислення визначеного інтеграла	183
6.11. Деякі застосування визначеного інтеграла	186
6.11.1. Обчислення площі плоскої фігури	186
6.11.2. Шлях при нерівномірному русі	187
6.11.3. Робота змінної сили	189
6.11.4. Чисельність популяцій	190
6.11.5. Продукт хімічної реакції	191
6.11.6. Застосування теореми про середнє значення	192
6.11.7. Доза радіаційного опромінення	193
6.11.8. Інтегральні спектральні характеристики джерел випромінювання	195
6.12. Варіант поточного контролю засвоєння теми	196
Вправи до розділу 6	199

Розділ 7. Диференціальні рівняння. Моделювання процесів диференціальними рівняннями	205
7.1. Основні поняття	205
7.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Загальний розгляд	208
7.3. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними	211
7.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	215
7.5. Диференціальні рівняння другого порядку	220
7.5.1. Диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить шуканої функції та її похідної	222
7.5.2. Диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить шуканої функції	223
7.6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами	224
7.7. Моделювання процесів лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку	228
7.7.1. Радіоактивний розпад	228
7.7.2. Закон поглинання світла Бугера та закон поглинання іонізуючого випромінювання	229

7.7.3. Закон охолодження тіла.....	230
7.7.4. Закон розмноження бактерій.....	231
7.7.5. Закон розчинення лікарської речовини з таблетки.....	231
7.8. Кінетика хімічних реакцій.....	232
7.8.1. Хімічні реакції першого порядку: $A \rightarrow$ продукт реакції.....	232
7.8.2. Хімічні реакції другого порядку: $A + B \rightarrow$ продукт реакції.....	234
7.9. Фармакокінетичні моделі.....	236
7.9.1. Однокамерна лінійна фармакокінетична модель.....	236
7.9.2. Однокамерна лінійна фармакокінетична модель із всмоктуванням.....	238
7.9.3. Однокамерна лінійна модель з крапельницею.....	240
7.10. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Розв'язування диференціальних рівнянь».....	241
7.11. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Моделювання процесів диференціальними рівняннями».....	243
Вправи до розділу 7.....	245
Розділ 8. Ймовірності випадкових подій.....	251
8.1. Предмет теорії ймовірностей.....	251
8.2. Статистичне означення ймовірності випадкової події.....	253
8.3. Класичне означення ймовірності випадкової події.....	257
8.4. Теоретико-множинний розгляд випадкових подій.....	260
8.5. Функція ймовірностей.....	264
8.6. Умовна ймовірність.....	267
8.7. Теореми множення ймовірностей.....	271
8.8. Теореми додавання ймовірностей.....	274
8.9. Формула повної ймовірності.....	279
8.10. Формула Байєса.....	281
Вправи до розділу 8.....	284
Розділ 9. Аналіз випадкових величин.....	289
9.1. Випадкова величина.....	289
9.2. Способи задання закону розподілу для дискретних випадкових величин.....	291
9.3. Функція розподілу та її властивості.....	294
9.4. Квантилі.....	297
9.5. Функція щільності розподілу та її властивості.....	300
9.6. Математичне сподівання.....	304
9.7. Властивості математичного сподівання.....	307

9.8. Дисперсія та стандартне відхилення.....	311
9.9. Властивості дисперсії.....	313
9.10. Центровані та нормовані випадкові величини.....	316
9.11. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Аналіз дискретних випадкових величин».....	317
9.12. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Функція розподілу випадкової величини».....	319
9.13. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Функція щільності розподілу випадкової величини».....	321
Вправи до розділу 9.....	323
Розділ 10. Основні закони розподілу випадкових величин.....	331
10.1. Біномний закон розподілу.....	331
10.2. Поліномний розподіл.....	334
10.3. Апроксимаційні формули Муавра – Лапласа.....	336
10.4. Розподіл Пуассона.....	340
10.5. Рівномірний розподіл.....	342
10.6. Експонентний розподіл.....	345
10.7. Нормальний закон розподілу.....	347
10.8. Стандартний нормальний розподіл.....	349
10.9. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Основні закони розподілу дискретних випадкових величин».....	353
10.10. Варіант поточного контролю засвоєння теми «Основні закони розподілу неперервних випадкових величин».....	355
Вправи до розділу 10.....	357
Розділ 11. Граничні закони теорії ймовірностей.....	364
11.1. Сукупність незалежних випадкових величин.....	365
11.2. Нерівність Чебишова. Перша форма.....	369
11.3. Нерівність Чебишова. Друга форма.....	372
11.4. Закон великих чисел у формі Чебишова.....	376
11.5. Застосування теореми Чебишова в теорії вимірювань.....	380
11.6. Закон великих чисел у формі Бернуллі.....	382
11.7. Центральна гранична теорема. Прикладне значення центральної граничної теореми.....	385
Вправи до розділу 11.....	389
Розділ 12. Закони розподілу статистик вибірки.....	392
12.1. χ^2 -розподіл (розподіл Пірсона).....	392

12.2. t -розподіл (розподіл Стьюдента)	398
12.3. F -розподіл (розподіл Фішера – Снедекора)	405
Вправи до розділу 12	410
Розділ 13. Аналіз варіаційних рядів	412
13.1. Генеральна та вибіркова сукупності	412
13.2. Дискретний варіаційний ряд	414
13.3. Емпірична функція розподілу для дискретної ознаки	416
13.4. Інтервальний варіаційний ряд	419
13.5. Емпірична функція щільності розподілу	424
13.6. Емпірична функція розподілу неперервної ознаки	428
13.7. Варіант поточного контролю засвоєння теми	433
Вправи до розділу 13	435
Розділ 14. Оцінювання параметрів розподілу досліджуваної ознаки	439
14.1. Поняття статистичного оцінювання	439
14.2. Точкові оцінки характеристик розподілу	441
14.3. Вірогідний проміжок для математичного сподівання нормально розподіленої ознаки при відомій дисперсії	448
14.4. Вірогідний проміжок для математичного сподівання нормально розподіленої ознаки з невідомою дисперсією	452
14.5. Вірогідний проміжок для дисперсії нормально розподіленої ознаки	454
14.6. Вірогідний проміжок для частки	459
14.7. Оцінювання випадкової похибки сукупності вимірювань	462
14.7.1. Оцінювання випадкової похибки сукупності прямих вимірювань	463
14.7.2. Оцінювання випадкової похибки сукупності опосередкованих вимірювань	464
14.8. Варіант поточного контролю засвоєння теми	468
Вправи до розділу 14	470
Розділ 15. Статистична перевірка гіпотез	473
15.1. Основні засади статистичної перевірки гіпотез	474
15.2. Перевірка вибірки на однорідність та виявлення промахів серед дослідних даних	483
15.3. Перевірка методу аналізу на наявність систематичної помилки	486

15.3.1. Дисперсія методу відома й дорівнює σ^2	487
15.3.2. Дисперсія методу невідома	489
15.4. Порівняння нового методу аналізу зі стандартним за вдтворюваністю	491
15.5. Вплив дії фактора на зміщення центра розподілу ознаки.....	493
Вправи до розділу 15	495

Розділ 16. Статистична перевірка гіпотез про рівність

параметрів незалежних нормальних сукупностей	497
16.1. Загальна схема перевірки гіпотез	497
16.2. Перевірка статистичної гіпотези про рівність дисперсій двох нормальних сукупностей.....	500
16.2.1. Двостороння критична область	501
16.2.2. Одностороння критична область.....	504
16.3. Перевірка гіпотези про рівність центрів розподілу двох незалежних нормальних сукупностей при великих вибірках ..	507
16.3.1. Двостороння критична область	507
16.3.2. Одностороння критична область.....	510
16.4. Перевірка гіпотези про рівність центрів розподілу двох незалежних нормальних сукупностей при малих вибірках, коли дисперсії сукупностей вважаються однаковими.....	512
16.4.1. Двостороння критична область	512
16.4.2. Одностороння критична область.....	514
16.5. Перевірка гіпотези про рівність центрів розподілу двох незалежних нормальних сукупностей, коли їх дисперсії невідомі і не вважаються однаковими	516
16.6. Перевірка гіпотези про рівність центрів розподілу двох спряжених сукупностей	518
16.7. Варіант поточного контролю засвоєння теми	520
Вправи до розділу 16	523

Розділ 17. Критерії узгодженості законів розподілу

досліджуваних ознак	526
17.1. Критерій Пірсона для дискретних ознак	527
17.2. Критерій Пірсона для неперервних ознак	532
Вправи до розділу 17	536

Розділ 18. Однофакторний дисперсійний аналіз.....

18.1. Основні поняття дисперсійного аналізу	538
---	-----

18.2. Однофакторний дисперсійний аналіз.	
Параметрична модель.....	541
18.3. Методи сукупних порівнянь середніх.....	548
18.3.1. Метод Тьюкі	549
18.3.2. Метод Шеффе.....	554
18.3.3. Множинний t -метод.....	554
18.4. Варіант поточного контролю засвоєння теми	556
Вправи до розділу 18	559
Розділ 19. Аналіз взаємозв'язку між ознаками	562
19.1. Статистичний зв'язок між неперервними ознаками.....	562
19.2. Кореляційна залежність.....	565
19.3. Емпірична лінія регресії.....	567
19.4. Коефіцієнт кореляції.....	572
19.5. Оцінка коефіцієнта кореляції.....	574
19.6. Варіант поточного контролю засвоєння теми	578
Вправи до розділу 19	580
Розділ 20. Однофакторний регресійний аналіз	584
20.1. Точкове оцінювання параметрів лінійної регресії методом найменших квадратів.....	584
20.2. Перевірка гіпотези про наявність лінійного кореляційного зв'язку	589
20.3. Інтервальні оцінки параметрів лінійної регресії та лінії регресії.....	593
Вправи до розділу 20	596
Додатки	599
Література	627
Предметний покажчик	629

Навчальне видання

Личковський Едуард Іванович
Свердан Петро Леонович
Тіманюк Володимир Олександрович
Чалий Олександр Васильович

Вища математика

Підручник

Редактор *О. В. Марчук*
Технічний редактор *Ю. П. Тертун*
Коректор *Л. Я. Шутова*
Комп'ютерна верстка: *Г. А. Пешков*

Підписано до друку 30.07.14. Формат 60×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Тираж 1100 пр. Ум. друк. арк. 39,5.
Зам. № 770.

ПП “Нова Книга”
21029, м. Вінниця, вул. Квятека, 20
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2646 від 11.10.2006 р.
Тел. (0432) 52-34-80, 52-34-82. Факс 52-34-81
E-mail: info@novaknyha.com.ua
www.novaknyha.com.ua